

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh :.....

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Cho các số dương a, b . Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+2} < \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$.
- b) Trong một khu vườn nhỏ có 3 con thỏ và 3 cây cà rốt. Mỗi con thỏ sẽ chọn ngẫu nhiên một cây cà rốt để ăn. Tính xác suất để mỗi cây cà rốt được chọn bởi không quá một con thỏ (tức là không có hai con thỏ nào chọn cùng một cây cà rốt).

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 567 \\ \sqrt{xy}(x+y)^2 = 243. \end{cases}$$
- b) Cho các số hữu tỉ dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$a + b + c = 2\sqrt{abc}.$$

Chứng minh rằng, $S = \frac{bc - b - c}{a}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC , nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường tròn đường kính AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K (khác A). Đường thẳng KD cắt lại đường tròn đường kính AI tại điểm thứ hai P (khác K). Giả sử các đường thẳng AK và BC cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng

- a) $\triangle KEC \sim \triangle KFB$ và KD là phân giác của góc $\widehat{BKC}$.
- b) $AP \perp BC$.
- c) IQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC .

Câu 4. (2,0 điểm) Một số nguyên dương được gọi là *số giàu* có nếu như tổng tất cả các ước số dương của nó lớn hơn hai lần số đó. Số nguyên dương mà không phải là số *số giàu* có được gọi là *số thiếu thốn*. Chứng minh rằng

- a) Có vô số *số thiếu thốn*.
- b) $N = 6 \cdot 2^n$ là *số giàu* có với mọi số nguyên dương n .

Câu 5. (1,0 điểm) Trên bảng viết 1 000 số nguyên liên tiếp. Trong mỗi lượt di chuyển, ta chia các số đã viết thành các cặp tùy ý, và thay thế mỗi cặp số bằng tổng và hiệu của chúng (không nhất thiết phải trừ số lớn hơn cho số nhỏ hơn; tất cả các phép thay thế diễn ra đồng thời). Hỏi, sau một số hữu hạn lần di chuyển như trên, trên bảng có thể xuất hiện dãy gồm 1 000 số nguyên liên tiếp nữa hay không?

.....**HẾT**.....

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- 1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- 2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	a) Ta có nhận xét: Nếu x, y là các số dương thì $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Do đó $\frac{a}{a+1} \leq \frac{a}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2}.$ Mặt khác $\frac{b}{b+2} \leq \frac{b}{2\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{b}}{2}.$ Cộng các bất đẳng thức lại ta có kết quả.	1,0
	b) Phép thử ngẫu nhiên: 3 con thỏ chọn ngẫu nhiên 3 cây cà rốt. Nếu kí hiệu 1, 2, 3 là các cây cà rốt thì tập hợp gồm các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó là tập hợp Ω gồm các bộ $(i; j; k)$ với $i, j, k \in \{1; 2; 3\}$. Số phần tử của tập hợp Ω là 27.	0,5
	Gọi E là biến cố: "mỗi cây cà rốt được chọn bởi không quá một con thỏ". Tập các kết quả thuận lợi cho E là (i, j, k) với i, j, k đôi một khác nhau và $i, j, k \in \{1; 2; 3\}$. Số các kết quả thuận lợi là 6.	0,25
	Vậy xác suất để không có hai con thỏ nào chọn cùng một cây cà rốt là $P(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$	0,25
Câu 2	a) Điều kiện $xy \geq 0$. Từ hệ phương trình ta có $xy > 0$ và $x + y > 0$ và $3(x+y)(x^2+y^2) = 7\sqrt{xy}(x+y)^2$ hay $3(x^2+y^2) = 7\sqrt{xy}(x+y)$.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Đặt $x + y = k\sqrt{xy}$ thì $k > 0$ và $3(k^2 - 2) = 7k.$ Vậy $3k^2 - 7k - 6 = 0$. Do đó $k = 3$.	0,25
	Thành thử $x + y = 3\sqrt{xy}$. Thay vào phương trình thứ hai cho ta $9\sqrt{xy}^3 = 243$ hay $xy = 9$. Ta có hệ $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 9. \end{cases}$ Do đó x, y là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 9t + 9 = 0$. Từ đó $(x; y) = \left(\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}; \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}; \frac{9 + 3\sqrt{5}}{2} \right).$	0,5
	b) Từ giả thiết abc là bình phương của một số hữu tỉ.	0,25
	Lại có $a^2 + 2(b + c - 2bc)a + (b + c)^2 = 0$ Xét phương trình bậc hai $x^2 + 2(b + c - 2bc)x + (b + c)^2 = 0.$ Phương trình có nghiệm hữu tỉ $x = a$ nên Δ là bình phương của số hữu tỉ. Do đó $(b + c - 2bc)^2 - (b + c)^2 = m^2$ với m là số hữu tỉ.	0,25
	Thành thử $4bc(bc - b - c) = m^2.$ Vậy $\frac{bc - b - c}{a} = \frac{bc(bc - b - c)}{abc} = \frac{m^2}{4abc}$ là bình phương của số hữu tỉ.	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 4	a) Với mỗi số nguyên dương n, xét số $N = 2^n$. Ta chứng minh N là <i>số thiếu thốn</i>. Thật vậy, tập hợp các ước dương của N là $S = \{1; 2; 2^2; \dots; 2^n\}.$ Do đó tổng tất cả các ước dương của N là $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 < 2N.$ Vậy N là <i>số thiếu thốn</i>.	1,0
	Nhận xét. Học sinh có thể xét $N = p$ là số nguyên tố; lưu ý nhấn mạnh tập các số nguyên tố là vô hạn.	
	b) Rõ ràng $2^a \neq 3 \cdot 2^b$ với mọi $a, b \in \mathbb{N}$. Vậy, mỗi ước dương của N hoặc có dạng 2^a hoặc $3 \cdot 2^b$ với $a, b \in \{0, \dots, n+1\}$.	0,25
	Vậy tổng tất cả các ước dương của N là $(1 + 2 + \dots + 2^{n+1}) + (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + 3 \cdot 2^{n+1}) = 4(2^{n+2} - 1).$	0,25
	Để ý rằng $4(2^{n+2} - 1) - 12 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n - 4 > 0$ với mọi $n \geq 1$. Vậy $N = 6 \cdot 2^n$ là <i>số giàu có</i>.	1,0
Câu 5	Mỗi lần thực hiện di chuyển, với mỗi cặp (a, b) được thay bằng $(a+b, a-b)$ hoặc $(a+b, b-a)$ và $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ nên tổng các bình phương tất cả các số sẽ tăng lên gấp đôi.	0,25
	Bây giờ giả sử trên bảng có 1000 số nguyên liên tiếp. Ta chia các số này thành 125 nhóm gồm 8 số nguyên liên tiếp. Với mỗi nhóm gồm 8 số nguyên liên tiếp, giả sử là $a+1, a+2, \dots, a+8,$ tổng bình phương tất cả các số trong mỗi nhóm là $N = (a+1)^2 + \dots + (a+8)^2 = 8a^2 + 72a + 12 \cdot 17$ Vậy $N = 24k + 12$. Vì ta có một số lẻ các nhóm như vậy, nên tổng các bình phương của tất cả các số trên bảng cũng có dạng $24k + 12$. Từ hai điều trên ta suy ra: không thể nhận được 1000 số nguyên liên tiếp được nữa.	0,75